

GRACIELA DURET

MANUAL DEL
PRINCIPIANTE EN
**ESTADÍSTICA
DESCRIPTIVA Y
PROBABILIDAD**



ARREPAR

ÍNDICE

Prefacio	V
----------------	---

1

CONSIDERACIONES Y CONCEPTOS INICIALES

1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.2. DEFINICIONES ELEMENTALES.....	4
1.2.1. Experimento y unidad experimental.....	4
1.2.2. Medición y dato estadístico	6
1.2.3. Información	9
1.2.4. Estadística	10
1.2.5. Universo	12
1.2.6. Variable	13
1.2.6.1. Variable cualitativa.....	13
1.2.6.2. Variable cuantitativa.....	14
1.2.7. Población y muestra.....	16
1.2.8. Etapas de la tarea estadística.....	18
1.2.8.1. Enunciación del problema y definición del Universo.....	18
1.2.8.2. Formulación de los instrumentos de medición	18
1.2.8.3. Recopilación de los datos	19
1.2.8.4. Presentación de los datos	20
1.2.8.5. Análisis estadístico de los datos	22
1.2.8.6. Interpretación de los resultados.....	23
1.2.9. Regularidad estadística	23
1.3. CANTIDADES ABSOLUTAS Y RELATIVAS	23
1.3.1. Cantidades absolutas	24
1.3.2. Cantidades relativas	24

1.3.3. Proporción estadística	28
1.4. PROBLEMAS PARA RESOLVER	31

2

MÉTODOS DE PRESENTACIÓN DE DATOS

2.1. CUADRO ESTADÍSTICO.....	37
2.1.1. Definición de cuadro estadístico	37
2.1.2. Partes estructurales de un cuadro estadístico	38
2.2. GRÁFICO ESTADÍSTICO.....	42
2.2.1. Definición de gráfico estadístico.....	42
2.2.2. Partes estructurales de un gráfico estadístico.....	43
2.2.2.1. Ejemplos de construcción de gráficos	44
2.2.3. TIPOS DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS.....	46
2.2.3.1. Gráficos estadísticos para variables cualitativas	47
2.2.3.2. Gráficos estadísticos para variables cuantitativas	48
2.2.3.3. Gráficos circulares	52
2.3. PROBLEMAS RESUELTOS	58

3

ANÁLISIS DESCRIPTIVO

3.1. DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS.....	71
3.1.1. Definiciones	72
3.1.2. Variables cualitativas.....	74
3.1.3. Variables cuantitativas discretas.....	76
3.1.3.1. Frecuencia absoluta simple. Presentación tabular	78
3.1.3.2. Frecuencia absoluta simple. Presentación gráfica. Gráfico de bastones	79
3.1.3.3. Frecuencia absoluta acumulada. Presentación tabular.....	81
3.1.3.4. Representación gráfica de las frecuencias absolutas acumuladas. Gráfico escalonado o en escalera.....	83

3.1.3.5. Frecuencia relativa simple y acumulada. Presentación tabular ...	85
3.1.4. Variables cuantitativas continuas	87
3.1.4.1. Intervalo de clase	87
3.1.4.2. Frecuencias	89
3.1.4.3. Frecuencia absoluta simple. Presentación tabular	91
3.1.4.4. Representación gráfica de la distribución de frecuencias absolutas simples. Histograma	94
3.1.4.5. Frecuencia absoluta acumulada. Presentación tabular.....	97
3.1.4.6. Representación gráfica de la distribución de frecuencias absolutas acumuladas. Ojiva.....	99
3.1.4.7. Frecuencia relativa simple y acumulada. Presentación tabular ...	102
3.1.5. Representación gráfica de la frecuencia relativa.....	104
3.1.5.1. Variables discretas.....	104
3.1.5.2. Variables continuas	105
3.2. MEDIDAS QUE RESUMEN INFORMACIÓN	107
3.2.1. Medidas de concentración	109
3.2.1.1. Rango u orden percentilar.....	109
3.2.1.2. Percentiles.....	114
3.2.1.3. Determinación gráfica.....	121
3.2.1.4. Percentiles especiales	125
3.2.2. Medidas de posición o de tendencia central	126
3.2.2.1. Modo o moda.....	127
3.2.2.2. Mediana	132
3.2.2.3. Promedios simples.....	143
3.2.2.4. Promedios ponderados.....	166
3.2.3. Medidas de variabilidad.....	168
3.2.3.1. Desvío medio.....	169
3.2.3.2. Suma de cuadrados	170
3.2.3.3. Varianza	171
3.2.3.4. Desvío estándar o desvío típico	178
3.2.3.5. Coeficiente de variación	180
3.2.4. Coeficiente de disparidad en variables cualitativas o categóricas.....	183
3.2.5. Momentos empíricos	188
3.2.5.1. Momento empírico absoluto.....	189

3.2.5.2. Momento empírico centrado.....	191
3.2.5.3. Relaciones entre los momentos empíricos centrados y absolutos..	194
3.2.6. Medidas de forma	195
3.2.6.1. Coeficiente de asimetría.....	196
3.2.6.2. Coeficiente de Curtosis.....	201
3.2.7. Variable de cálculo.....	205
3.3. PROBLEMAS DE APLICACIÓN	214
3.3.1. Problemas resueltos	214
3.3.2. Problemas para resolver.....	220

4

PROBABILIDAD

4.1. INTRODUCCIÓN	231
4.1.1. Modelos matemáticos	233
4.1.2. Experimento aleatorio o estocástico	235
4.1.3. Espacio muestral	237
4.1.4. Suceso aleatorio.....	238
4.1.4.1. Definición	238
4.1.4.2. Sucesos especiales	239
4.1.5. Operaciones con sucesos	240
4.1.5.1. Complemento de un suceso	240
4.1.5.2. Suceso intersección o suceso conjunto.....	241
4.1.5.3. Suceso unión incluyente	242
4.1.5.4. Suceso unión excluyente.....	243
4.1.6. Sucesos compatibles y sucesos incompatibles	245
4.1.6.1. Sucesos compatibles	246
4.1.6.2. Sucesos mutuamente excluyentes o incompatibles	248
4.1.7. Frecuencia relativa	249
4.1.7.1. Definición	249
4.1.7.2. Principio de estabilidad de la frecuencia relativa	250
4.2. DEFINICIONES BÁSICAS	253
4.2.1. Axiomas y teoremas básicos para el cálculo de probabilidad.....	254

4.2.1.1. Axiomas.....	254
4.2.1.2. Teoremas.....	255
4.2.1.3. Demostración de los teoremas.....	256
4.2.1.4. Generalización del teorema cuatro	260
4.2.1.5. Generalización del teorema cinco.....	260
4.3. DEFINICIONES DE PROBABILIDAD	260
4.3.1. Definición axiomática	261
4.3.2. Definición clásica.....	262
4.3.3. Definición frecuencial.....	264
4.3.4. Definición subjetiva	266
4.3.5. Interpretación del valor numérico de probabilidad	267
4.4. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD MARGINAL, PROBABILIDAD CONJUNTA Y PROBABILIDAD CONDICIONAL CUANDO EL ESPACIO MUESTRAL ES FINITO Y LOS RESULTADOS POSIBLES SON IGUALMENTE VEROSÍMILES O POSIBLES	268
4.4.1. Total conjunto y total marginal	268
4.4.1.1. Definición de total conjunto	270
4.4.1.2. Definición de total marginal	271
4.4.1.3. Definición de probabilidad conjunta	274
4.4.1.4. Definición de probabilidad marginal	274
4.4.1.5. Definición de probabilidad condicional.....	275
4.5. PROBABILIDAD MARGINAL. PROBABILIDAD CONJUNTA. PROBABILIDAD CONDICIONAL.....	279
4.5.1. Probabilidad marginal.....	280
4.5.2. Probabilidad conjunta	280
4.5.2.1. Para dos sucesos	280
4.5.2.2. Para más de dos sucesos	280
4.5.3. Probabilidad condicional	281
4.6. OPERACIONES CON PROBABILIDAD	283
4.6.1. Regla del producto o probabilidad compuesta.....	283
4.6.2. Regla de la suma	286
4.6.3. Sistema exhaustivo.....	291
4.6.4. Teorema de la probabilidad total de un suceso	293
4.6.5. Teorema de Bayes	294

4.6.6. Sucesos probabilísticamente independientes.....	299
4.6.7. Diagrama de árbol para el cálculo de probabilidad conjunta.....	300
4.7. PROBLEMAS DE APLICACIÓN.....	307
4.7.1. Problemas resueltos	307
4.7.2. Problemas para resolver.....	318

5

VARIABLES ALEATORIAS

5.1. DEFINICIÓN.....	335
5.2. VARIABLES ALEATORIAS UNIDIMENSIONALES.....	336
5.2.1. Variable aleatoria discreta unidimensional	340
5.2.1.1. Distribución de probabilidad univariada.....	342
5.2.1.1.1. Función de probabilidad puntual	342
5.2.1.1.2. Función de distribución	346
5.2.1.1.3. Función de distribución complementaria	348
5.2.1.1.4. Relación entre las funciones de distribución	349
5.2.1.1.5. Percentiles de variables aleatorias discretas	350
5.2.2. Variables aleatorias continuas unidimensionales	354
5.2.2.1. Distribución de probabilidad univariada	356
5.2.2.1.1. Función de densidad de probabilidad	356
5.2.2.1.2. Función de distribución	360
5.2.2.1.3. Función de distribución complementaria	362
5.2.2.1.4. Relación entre las funciones de distribución	363
5.2.2.1.5. Percentiles de variables aleatorias continuas	364
5.2.2.1.6. Función percentilar para variables aleatorias continuas	364
5.2.3. Momentos teóricos	369
5.2.3.1. Momento de una variable aleatoria discreta	370
5.2.3.2. Momento de una variable aleatoria continua.....	370
5.2.4. Momentos particulares.....	371
5.2.4.1. Momentos absolutos	371
5.2.4.1.1. Cálculo de los momentos absolutos de las variables discretas	372

5.2.4.1.2. Cálculo de los momentos absolutos de las variables continuas.....	374
5.2.4.2. Momentos centrado	375
5.2.4.2.1. Cálculo de los momentos centrados de las variables discretas	376
5.2.4.2.2. Cálculo de los momentos centrados de las variables continuas.....	378
5.2.4.3. Relación entre los momentos centrados y los momentos absolutos	379
5.2.4.4. Función generatriz de momentos.....	380
5.2.4.4.1. Función generatriz de momentos para variables discretas ..	381
5.2.4.4.2. Función generatriz de momentos para variables continuas ...	382
5.2.4.5. Fórmulas de trabajo para el cálculo de la varianza.....	383
5.2.4.5.1. Fórmula para variable discretas	383
5.2.4.5.2. Fórmula para variable continuas.....	385
5.2.5. Otras medidas que resumen información.....	386
5.2.5.1. Desvío estándar o desvío típico	386
5.2.5.1.1. Desvío estándar de una variable aleatoria discreta.....	387
5.2.5.1.2. Desvío estándar de un variable aleatoria continua	388
5.2.5.2. Coeficiente de variación	389
5.2.5.3. Mediana	391
5.2.5.3.1. Mediana de una variable aleatoria discreta.....	392
5.2.5.3.2. Mediana de una variable aleatoria continua	393
5.2.5.4. Modo.....	395
5.2.5.4.1. Modo de una variable aleatoria discreta	395
5.2.5.4.2. Modo de una variable aleatoria continua	397
5.2.5.5. Coeficiente de asimetría.....	398
5.2.5.6. Coeficiente de Curtosis	400
5.2.6. Propiedades del promedio y de la varianza	402
5.2.7. Teorema de Tchebycheff.....	403
5.2.8. Variable estandarizada	406
5.2.8.1. Definición	406
5.2.8.2. Características de la variable estandarizada	407
5.2.8.3. Aplicaciones de la variable estandarizada	408

5.3. PROBLEMAS DE APLICACIÓN..... 409
 5.3.1. Problemas resueltos 409

6

**LEYES DE PROBABILIDAD
 ESPECÍFICAS**

6.1. VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS 421
 6.1.1. Distribución de Bernoulli..... 424
 6.1.2. Repetición de un experimento aleatorio dicotómico 426
 6.1.3. Distribución hipergeométrica..... 428
 6.1.4. Distribución binomial 434
 6.1.5. Distribución geométrica (observaciones independientes) 442
 6.1.6. Distribución de Pascal (observaciones independientes) 444
 6.1.7. Relación entre la distribución de Pascal y la distribución Binomial ... 448
 6.1.8. Distribución de Poisson 452
 6.1.9. Aproximación de la Distribución Hipergeométrica a la distribución binomial 457
 6.1.10. Aproximación de la Distribución Binomial a la Distribución de Poisson 458
 6.1.11. Distribución Binomial Negativa 461
 6.2. VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS..... 463
 6.2.1. Distribución Uniforme 464
 6.2.2. Distribución exponencial 468
 6.2.3. Distribución normal 471
 6.2.3.1. Concepto y características 472
 6.2.3.2. Variable normal estandarizada o tipificada 475
 6.2.3.3. Función de distribución de la variable estandarizada 477
 6.2.3.4. Cálculo de probabilidad..... 479
 6.2.3.5. Cálculo de los fractiles o percentiles 484
 6.2.4. Transformación lineal de variables aleatorias normales 486
 6.2.4.1. Transformación afín de variables aleatorias normales..... 486
 6.2.4.2. Suma de variables aleatorias normales independientes 488

6.2.5. Aproximación de la Distribución Binomial a la Distribución Normal ... 502
 6.2.6. Aproximación de la Distribución de Poisson a la Distribución Normal 505
 6.2.7. Distribución Log-Normal 508
 6.2.8. Distribución Gamma..... 511
 6.2.8.1. Introducción..... 511
 6.2.8.2. Concepto y características 512
 6.2.9. Distribución Beta 516
 6.2.10. Distribución de Weibull 519
 6.3. TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE..... 520
 6.4. PROBLEMAS DE APLICACIÓN..... 524
 6.4.1. Problemas resueltos 524
 6.4.2. Problemas para resolver..... 562

7

TÓPICOS ESPECIALES

7.1. APLICACIÓN DE MEDIDAS DE CONCENTRACIÓN 583
 7.1.1. Curva de Lorenz y coeficiente de concentración de Gini 583
 7.1.1.1. Introducción..... 583
 7.1.1.2. Conceptos básicos..... 584
 7.1.1.3. Distribución proporcional de una variable..... 591
 7.1.1.4. Curva de Lorenz 599
 7.1.1.5. Coeficiente de Gini 599
 7.1.1.6. Relación entre el coeficiente de Gini y la curva de Lorenz 602
 7.1.1.7. Curva de Lorenz y coeficiente de Gini aplicando el Enfoque 2..... 609
 7.2. VARIABLES ALEATORIAS MULTIDIMENSIONALES 613
 7.2.1. Definición 613
 7.2.2. Variables aleatorias bidimensionales 614
 7.2.2.1. Funciones conjuntas 616
 7.2.2.1.1. Función de probabilidad puntual conjunta 616
 7.2.2.1.2. Función de densidad de probabilidad conjunta 617

7.2.2.2. Funciones marginales	618
7.2.2.2.1. Función de probabilidad marginal.....	618
7.2.2.2.2. Función de densidad de probabilidad marginal.....	619
7.2.2.3. Funciones condicionales.....	620
7.2.2.3.1. Función de probabilidad condicional	620
7.2.2.3.2. Función de densidad de probabilidad condicional	621
7.2.2.4. Ejemplos	621
7.2.2.4.1. Ejemplo para variable discreta	621
7.2.2.4.2. Ejemplo para variable continua	623
7.2.2.5. Variables estadísticamente independientes	626
7.3.3. Momento conjunto.....	627
7.3.3.1. Momento conjunto de una variable aleatoria bidimensional discreta.....	627
7.3.3.2. Momento conjunto de una variable aleatoria bidimensional continua	628
7.3.3.3. Esperanza matemática de funciones especiales.....	629
7.3.3.3.1. Esperanza matemática de la suma de dos variables aleatorias.....	629
7.3.3.3.2. Esperanza matemática de la diferencia de dos variables aleatorias.....	630
7.3.3.3.3. Esperanza matemática del producto de dos variables aleatorias.....	631
7.3.3.3.4. Covarianza.....	632
7.3.3.3.5. Varianza de la suma de dos variables aleatorias	636
7.3.3.3.6. Varianza de la diferencia de dos variables aleatorias.....	637
7.3.3.4. Ejemplos	638
7.3.3.4.1. Ejemplos para variable discreta.....	638
7.3.3.4.2. Ejemplo para variable continua	645